

ger rasch abnehmenden GAUSS-Funktion moduliert ist. Um aus II b ein Modell mit einem hellen Rand zu erhalten, das dem soeben betrachteten Modell II a sehr ähnlich ist, muß man noch eine GAUSS-Funktion nach Kurve B' mit $T_R = T_0$ addieren (Modell II c). Außerdem ist in Abb. 9 ein Modell II d mit einem helleren Ring ($T_r = \frac{3}{2} T_0$) eingetragen. Die Fehlerabschätzung nach Abb. 2 und 5 für die Sonnenmitte bzw. Abb. 3 und 6 a für randnahe Gebiete zeigt, daß der Fehler beim Modell II b infolge der raschen Abnahme der Fehler für die GAUSS-Funktion C durch den Beitrag der Kurve D allein gegeben ist. Er wird kleiner als 10% der Mittelpunktsintensität, wenn $|dT|/T_R < 0,3$ wird, d. h. nach Abb. 5 von etwa $N = 350$ an. Bei den Modellen II c und II d mit hellem Rand ist der Fehler hingegen nach Abb. 5 und 6 a durch diesen allein bestimmt. Beim Modell

II c wird er für eine Maximalentfernung $N = 850$ bzw. 950 in der Mitte der Sonne kleiner als 10% bzw. 5% der Intensität in der Mitte. Die entsprechenden Werte von N sind beim Modell II d etwa 900 bzw. 1000. Bei Modell II c stimmen sie mit den beim Modell II a erhaltenen praktisch überein. Doch hat der Aufbau der Modelle II c und II d aus GAUSS-Funktionen den Vorteil, daß direkt zu übersehen ist, welche der dabei verwendeten Teilfunktionen den Wert von N bestimmen.

Zusammenfassend ist zu folgern, daß die bisherigen Messungen mit MICHELSON-Interferometern nur ein grobes Bild der Intensitätsverteilung der Sonne geben und insbesondere im dm-Wellengebiet zu wenig Informationen über ihre genauere Struktur liefern.

Die Versetzung als elementare Eigenspannungsquelle*

Von EKKEHART KRÖNER

Aus dem Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule
und dem Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart
(Z. Naturforschg. 11 a, 969—985 [1956]; eingegangen am 7. September 1956)

Es wird die Stellung der Theorie der Eigenspannungen innerhalb der Kontinuumsmechanik des Festkörpers besprochen (Einleitung und Ziff. 1). Alle Eigenspannungsquellen lassen sich auf eine elementare Eigenspannungsquelle zurückführen, die Versetzung. Dabei hat man dem Begriff der Versetzung einen allgemeineren Sinn zu geben, als dies gewöhnlich in der Kristallphysik geschieht. Die geometrische Grundgleichung der Kontinuumsmechanik des Festkörpers ($\text{Rot } \epsilon + \alpha = 0$) wird in Ziff. 2 anschaulich abgeleitet (ϵ = Distorsionstensor, α = Tensor der Versetzungsdichte). Die punktförmigen Gitterfehlstellen lassen sich als infinitesimale Versetzungsschleifen oder (äquivalent) als Kräfte-dipole, -quadrupole usw. mit bestimmter elastischer Polarisierbarkeit beschreiben (Ziff. 3). Für ihre Wechselwirkung mit den elastischen Feldern des Kristalls gelten einfache Formeln (Ziff. 4). In Ziff. 5 folgen einige Anwendungen.

Unter Eigenspannungen im eigentlichen Sinn versteht man solche Spannungen, denen ein Körper unterliegen kann, der von keinerlei äußeren Kräften (oder Momenten), aber auch sonst von keinen spannungserzeugenden äußeren Einflüssen, wie z. B. Temperaturfeldern, elektrischen und magnetischen Feldern usw., beansprucht wird. Vom Standpunkt der Kontinuumsmechanik empfiehlt sich eine Unterteilung der Eigenspannungen, die davon ausgeht, daß es keine in aller kleinsten Bereichen völlig stetige Verteilung von Eigenspannungsquellen gibt, daß man vielmehr gewisse (später noch genauer zu definierende) elementare Eigenspannungsquellen anzunehmen hat, die mehr oder weniger dicht beieinander liegen können. Die Eigenspannungsquellen

können dann so angeordnet sein, daß es sinnvoll ist, über sie zu mitteln und sie als eine stetig variable räumliche Dichte α im ganzen Versuchskörper zu beschreiben. Es ergeben sich dann auch die (mittleren) Spannungen als stetige Ortsfunktion. Die beim Zerschneideversuch, also makroskopisch feststellbaren Spannungen sind von dieser Art.

Sind andererseits die dicht beieinander liegenden elementaren Eigenspannungsquellen im Mittel von entgegengesetztem Vorzeichen, so ergibt sich keine resultierende Dichte α . Von mittleren Spannungen kann dann ebenfalls nicht gesprochen werden, vielmehr werden hier die Spannungen in Bereichen von der Größenordnung des mittleren Abstandes der Eigenspannungsquellen ihr Vorzeichen umkehren. Solche Spannungen können röntgenographisch, aber nicht mehr direkt makroskopisch nachgewiesen wer-

* Dissertation, Stuttgart 1956.



den. Elastizitätstheoretisch hat man in diesem Fall die Eigenspannungsquellen als Singularitäten zu behandeln. Formal geht dies so vor sich, daß man die Dichte α als Distribution im Sinne von SCHWARTZ¹ ansetzt, so daß die entwickelten Formeln für beide Arten von Eigenspannungen gelten. Wir werden diese weiterhin kurz als „makroskopisch“ und „mikroskopisch“ bezeichnen. Zu den letzteren gehören offenbar auch die Spannungen einzelner, weit auseinanderliegender Eigenspannungsquellen beliebigen Vorzeichens, aber auch die den makroskopischen Spannungen überlagerten Spannungsschwankungen, die eben davon herrühren, daß die Quellenverteilung mikroskopisch unstetig ist.

Die Aufstellung einer Theorie der Eigenspannungen erfordert ein eingehendes Studium der Eigenspannungserzeugung. Diese läßt sich, wie wir noch sehen werden, immer auf irgendwelche plastischen Vorgänge in dem betreffenden Körper zurückführen. Das plastische Verhalten unserer Werkstoffe kann man, wie die Forschung der letzten Jahrzehnte ergeben hat, nur vom atomistischen bzw. kristallinen Aufbau der Materie her wirklich verstehen². Unser Versuchskörper wird daher der Kristall, und zwar der Einkristall sein. Die Ausweitung der Ergebnisse auf den Vielkristall ist noch im Fluß, und wir werden uns mit wenigen diesbezüglichen Bemerkungen begnügen.

Es sei ausdrücklich bemerkt, daß der für uns wesentliche Unterschied zwischen einem Kristall und einem sonst in der Elastizitätstheorie üblicherweise betrachteten deformierbaren Medium nicht die Anisotropie der elastischen Konstanten ist, sondern seine geometrische Anisotropie, d. h., es gibt an jedem Punkt des Kristalls ausgezeichnete, prinzipiell meßbare Richtungen. Im Normalzustand sind die entsprechenden Richtungen aller Punkte einander parallel, während der (elastischen oder plastischen) Verformung finden dagegen im allgemeinen Drehun-

gen der Kristallstruktur statt, denn man stellt hinterher röntgenographisch Krümmungen der Netzebenen des Kristalls fest. Wie diese Krümmungen mit den Eigenspannungen des Kristalls zusammenhängen, werden die nächsten Ziffern zeigen.

Hier sei nur noch bemerkt, daß solche Krümmungen, die zusammen mit den Eigenspannungen für den Zustand des Körpers nach der Verformung charakteristisch sind, auch beim Vielkristall beobachtet werden. Sie können (und müssen daher) auch hier (im Gegensatz zu den Orientierungen selbst) als gemittelte Funktionen des Ortes dargestellt werden. Diese Bemerkung genügt, um zu zeigen, daß unsere Theorie nicht auf Kristalle beschränkt bleiben wird.

1. Die Theorie der Eigenspannungen als Teil der Kontinuumsmechanik des Festkörpers

Wir zeigen in dieser Ziffer, wie sich eine Theorie der Eigenspannungen in die allgemeine Kontinuumsmechanik des festen Körpers einordnet.

Zur Beschreibung des Zustands eines Kristalls nach erfolgter Verformung definieren wir zunächst in üblicher Weise den Spannungstensor $\sigma \equiv (\sigma_{ij})$ an einem Punkt r als diejenige Kraft dp_j , die man an einer (gedachten oder reellen) infinitesimalen Schnittfläche $d\vec{i}$ durch r anzubringen hat, wenn infolge des Schnitts keine Verrückungen stattfinden sollen. Wir werden σ nicht als symmetrischen Tensor voraussetzen, da bei Kristallen durchaus auch äußere Drehmomentendichten $\mu \equiv (\mu_{ij})$ denkbar sind, welche elastische und auch plastische Verformungen hervorrufen können³.

Die Bedingungen des statischen Gleichgewichts der Kontinuumsmechanik des Festkörpers lauten dann

$$\text{Div } \sigma = -\mathfrak{F}, \quad \sigma_{ij} - \sigma_{ji} = -\mu_{ij}. \quad (1)$$

Dabei ist \mathfrak{F} die räumliche Dichte der äußeren Kräfte, und μ_{ij} ist so definiert, daß der mit μ_{ij} äquivalente

¹ L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions*, Paris, Hermann & C^{ie} 1950.

² Man vgl. etwa die folgenden zusammenfassenden Darstellungen: A. SEEGER, *Theorie der Gitterfehlstellen*, in Handbuch der Physik VII/1, Berlin - Göttingen - Heidelberg; Springer 1955. — A. H. COTTRELL, *Dislocations and plastic flow in crystals*, Oxford, Clarendon press 1953. — W. T. READ, *Dislocations in crystals*, New York, London und Toronto; McGraw Hill 1953. — F. R. N. NABARRO, *Adv. Physics* **1**, 269 [1952]. — P. HAASEN u. G. LEIBFRIED, *Fortschr. Phys.* **2**, 73 [1954].

³ Als einziges Beispiel nennen wir die ferromagnetischen Kristalle, in denen die spontane Magnetisierung in einer bevorzugten kristallographischen Richtung liegt, weil dann

die freie Energie des Kristalls besonders niedrig ist. Ein äußeres Magnetfeld kann diese Magnetisierung in eine energetisch ungünstigere Richtung drehen. Eine der magnetisch bevorzugten Richtungen des Kristalls möchte sich dann in die neue Magnetisierungsrichtung eindreuen, demnach muß das äußere Magnetfeld Drehmomente auf die Volumenelemente ausüben. Mit Hilfe der Formel (19) von PEACH und KOEHLER rechnet man leicht nach, daß eine Korngrenze von gekreuzten Schraubenversetzungen als Ganzes senkrecht zu ihrer Ebene nur durch antisymmetrische Spannungen eine Kraft erfährt, die bei genügend starken äußeren Drehmomenten schließlich eine plastische Verformung einleiten kann.

Vektor $\vec{\mu}_k \equiv \epsilon_{ijk} \mu_{ij}/2$ ein um die k -Richtung rechts drehendes Moment beschreibt. Wir nennen die Gl. (1) auch die „statischen Grundgleichungen“ der Theorie.

Zur vollständigen geometrischen Beschreibung des verformten Kristalls definieren wir den asymmetrischen „Distorsionstensor“ $\epsilon \equiv (\epsilon_{ij})$ durch die folgende Meßvorschrift:

Man zerschneide den Versuchskörper in verspanntem Zustand in seine Volumenelemente und bringe an diesen solche Oberflächenkräfte an, daß keine Verrückungen stattfinden. Danach nehme man diese Kräfte weg, ohne sonst etwas zu ändern, und messe die bei der Entspannung auftretenden Deformationen (Änderung der Kantenlängen und -winkel).

Diese ergeben nach Vorzeichenwechsel den symmetrischen Teil ϵ^S des Distorsionstensors ϵ . Sodann messe man (z. B. röntgenographisch) die Kristallorientierung der einzelnen Volumenelemente gegenüber einer Normalorientierung⁴, wonach man die stattgefundenen Strukturdrehungen der Volumenelemente (bis auf eine uninteressante konstante Drehung) angeben kann, welche den antisymmetrischen Teil ϵ^A des Distorsionstensors ϵ bilden. Dabei sei ϵ^A so definiert, daß der mit ϵ^A äquivalente Vektor $\vec{\epsilon}_k^A \equiv \epsilon_{ijk} \epsilon_{ij}^A/2$ eine Rechtsdrehung um die k -Richtung beschreibt. Während der ganzen Meßoperationen dürfen keinerlei Drehungen der Volumenelemente stattfinden.

Die so definierte elastische Deformation ist natürlich eine Zustandsgröße, während eine konstante Drehung des ganzen Körpers den Zustand nicht ändert. Das heißt, nicht ϵ^A selbst, sondern die ersten örtlichen Ableitungen von ϵ^A , die Krümmungen der Netzebenen, sind kennzeichnend für den Zustand des Kristalls⁵. Sieht man indessen von der uninteressanten konstanten Drehung ab, so kann man sagen, daß der Distorsionstensor ϵ den Zustand des Mediums eindeutig beschreibt.

Die geometrische Grundgleichung der Kontinuumsmechanik des festen Körpers lautet nun

$$\text{Rot } \epsilon = -\alpha. \quad (2)$$

Dabei stellt das asymmetrische Tensorfeld $\alpha \equiv (\alpha_{ij})$ die von NYE⁶ zuerst definierte makroskopische Ver-

setzungsichte des Körpers dar. Gl. (2) tritt an die Stelle der bei Eigenspannungen nicht mehr überall gültigen Kompatibilitätsbedingungen von DE ST. VENANT. Die Bedeutung von Gl. (2) werden wir bei ihrer anschaulichen Ableitung in der nächsten Ziffer erkennen.

Im allgemeinen sind die Deformationen (bzw. die Eigenspannungen) mit den Strukturdrehungen gekoppelt. Indessen ist es offenbar möglich, Versetzungen in einem Körper so zu verteilen, daß $\epsilon = \epsilon^A$ wird; denn nach Gl. (2) unterliegt α allein der Bedingung $\text{Div } \alpha = 0$, was besagt, daß Versetzungslinien im Innern des Körpers nicht auftreten können⁶. In diesem Fall sind (bei $\xi = 0$, $\mu = 0$) im ganzen Körper keine Deformationen, sondern nur Drehungen der Struktur erfolgt. Schneidet man hier ein Volumenelement aus, so behält dieses ohne Oberflächenkräfte seine Form und Lage, da es nicht deformiert ist. Infolgedessen ist ein derart verformter Kristall spannungsfrei⁷.

Diesen Betrachtungen ist zu entnehmen, daß wie bisher nur der symmetrische Teil von ϵ in die elastische Materialgleichung eingeht. Das gleiche gilt, wie demnächst ausführlicher berichtet werden wird⁸, für den Spannungstensor, so daß das HOOKESCHE Gesetz seine ursprüngliche Form (Summationskonvention!)

$$\sigma_{ij}^S = c_{ijkl} \epsilon_{kl}^S \quad (3)$$

beibehält. (c_{ijkl}) ist der HOOKESCHE Elastizitätstensor 4. Stufe des Kristalls mit den Symmetrieeigenschaften⁹

$$c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}. \quad (3')$$

Die elastische Energiedichte wird dann

$$e = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^S \epsilon_{ij}^S. \quad (4)$$

Wir wollen nun bis auf weiteres auch zulassen, daß die Dichten ξ , μ in Gl. (1) und α in Gl. (2) flächenhaft, linienhaft oder punktförmig entarten können. Dann ist in den Gln. (1) bis (4) die ganze (lineare) Kontinuumsmechanik des sich im stationären Zustand befindlichen Festkörpers enthalten. Insbesondere kann man leicht zeigen, daß beim einfach zusammenhängenden Körper durch Vorgabe von ξ , μ und α der Spannungszustand σ und Dis-

treten, da α aus einer Mittelung über diskrete Versetzungslinien endlicher Stärke folgt.

⁸ G. RIEDER, in Vorbereitung.

⁹ Bei elastischer Isotropie ist $c_{ijkl} = 2\mu \delta_{ik} \delta_{jl} + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl}$, wo λ , μ die LAMÉschen Konstanten sind.

⁴ Diese Messung muß im Fall der Magnetostraktion noch besonders erläutert werden²⁴.

⁵ Man vgl. hierzu die Bemerkung am Schluß der Einleitung.

⁶ J. F. NYE, Acta Met. 1, 153 [1953].

⁷ Dieser Satz gilt nur für die makroskopischen Eigenspannungen. Mikroskopische Spannungen müssen dagegen auf-

torsionszustand ϵ (letzterer im obigen Sinne) eindeutig bestimmt sind; für verschwindendes $\mathfrak{F}, \mu, \alpha$ wird auch σ und ϵ Null. Für einen Körper mit homogenen elastischen Konstanten gilt ferner der Satz von COLONNETTI¹⁰, welcher in unserer Ausdrucksweise besagt, daß der von den Einflüssen $\mathfrak{F}, \mu, \alpha$ herrührende, durch Integration der Gl. (4) in üblicher Weise zu ermittelnde Energieinhalt $E(\mathfrak{F}, \mu, \alpha)$ eines Körpers gleich der Summe der Energien $E(\mathfrak{F}, \mu, 0)$ und $E(0, 0, \alpha)$ ist. Danach liegt es nahe, die (stationäre) Kontinuumsmechanik des Festkörpers in zwei Teile zu unterteilen, je nachdem, ob die erfolgte Zustandsänderung durch äußere Kräfte \mathfrak{F} bzw. Drehmomente μ oder durch Versetzungen α aufrecht erhalten wird. Den ersten Teil nennen wir „Elastizitätstheorie der äußeren Kräfte und Momente“, den zweiten „Kontinuumstheorie der (stationären) Versetzungen“, und wenn wir speziell den am meisten interessierenden Fall im Auge haben, daß die Versetzungen in dem Medium ohne jede Einwirkung von außen her (z. B. Temperaturfeld, s. u.) beständig sind, werden wir auch von der „Theorie der Eigenspannungen“ reden.

Die hier angegebene Systematik weicht etwas ab von der vom Verfasser früher gegebenen¹¹, die indessen ihre Berechtigung weitgehend behält. Wendet man nämlich auf Gl. (2) von rechts her die Operation Rot an, so erhält man

$$\nabla \times \epsilon \times \nabla \equiv \text{Ink } \epsilon = \alpha \times \nabla \equiv \eta.$$

Der symmetrische Teil dieser Tensorgleichung lautet¹¹

$$\text{Ink } \epsilon^S = \eta^S, \quad (5)$$

wo $\eta^S \equiv (\eta_{ij}^S)$ der in Anm.¹¹ ausführlich behandelte (symmetrische) Inkompatibilitätstensor ist. Für $\eta^S \equiv 0$ sind die Gln. (5) direkt die Kompatibilitätsbedingungen von DE ST. VENANT. Durch die Kenntnis von \mathfrak{F}, μ und η^S sind die Spannungen und Deformationen eindeutig bestimmt. Dagegen enthalten die Gln. (5) keine Aussagen über die Strukturdrehungen. Diese gehen bei der Differentiation und nachfolgenden Symmetrisierung von (2) verloren. Indem wir die Gln. (5) als Grundgleichungen durch die Gln. (2) ersetzen, gewinnen wir indessen nicht nur die Möglichkeit, auch die Drehun-

gen der Kristallstruktur bzw. die Netzebenenkrümmungen zu beschreiben, sondern vor allem haben wir auf der rechten Seite von (2) im Gegensatz zu (5) direkt diejenige, wie wir noch sehen werden, anschauliche Größe stehen, die letzten Endes für alle Eigenspannungen verantwortlich ist. Vom physikalischen Gesichtspunkt bedeutet daher die neue Theorie einen weiteren Fortschritt gegenüber der in¹¹ beschriebenen. Die in¹¹ geschilderten mathematischen Methoden zur Eigenspannungsbestimmung behalten dagegen unverändert ihre Bedeutung.

2. Die geometrische Grundgleichung

Wir wollen jetzt die geometrische Grundgleichung möglichst anschaulich ableiten, indem wir die Eigenspannungserzeugung im Kontinuum studieren.

Es sei f eine beliebig in einem sich im unverformten Normalzustand befindlichen Körper gelegene ebene Fläche, die durch den (dimensionslosen) Normaleneinheitsvektor $\pi \equiv (\pi_i)$ charakterisiert sei. Wir wählen also eine Seite der Fläche f willkürlich als positiv heraus.

Nun führen wir längs f einen Schnitt und verschieben das auf der positiven Seite von f gelegene Schnitтуfer (plastisch) gegenüber dem „negativen“ Ufer um den überall tangential zur Fläche f liegenden infinitesimalen Vektor $d\delta$. $d\delta$ sei eine Funktion auf der Fläche f , die offenbar aus Gründen der Geometrie überall da auf dem Rand von f Null werden muß, wo dieser nicht auf der Oberfläche des Körpers liegt.

Verschweißen wir nun die beiden Schnitтуfer, und nehmen wir die verformenden (äußeren) Kräfte weg, so hinterbleibt ein Eigenspannungszustand, wie er von WEINGARTEN, VOLTERRA, SOMIGLIANA u. a.¹² schon zu Beginn des Jahrhunderts untersucht worden ist. Wenn die Relativverschiebung $d\delta$ der beiden Schnitтуfer klein genug ist, kann man die Eigenspannungen allein mit Hilfe der *linearen* Elastizitätstheorie berechnen. Für diesen Fall gilt der bekannte Satz von COLONNETTI¹³, wonach der Körper mit Eigenspannungen dasselbe Volumen einnimmt wie zuvor in unverformtem Normalzustand. Wir nennen daher die eben beschriebene Eigenspannungserzeu-

¹⁰ G. COLONNETTI, Acc. linc. Rend. (5) **24**/1, 404 [1915].

¹¹ E. KRÖNER, Z. angew. Phys. **7**, 249 [1955]. Hier wird auch gezeigt, wie die Temperaturspannungen in die Theorie einzuordnen sind. Vgl. ferner G. RIEDER, Z. Naturforschg. **11 a**, 171 [1956].

¹² J. WEINGARTEN, Acc. linc. Rend., Roma (V) **10**, 57 [1901]; V. VOLTERRA, Ann. l'Ecole norm. sup. III, **24**, 400 [1907]; C. J. SOMIGLIANA, Acc. Linc. Rend., Roma (V) **23**, 463 [1914] und **24**, 655 [1915].

¹³ G. COLONNETTI I¹⁰.

gung im Anschluß an NABARRO¹⁴ „konservativ“ in bezug auf das Volumen des Körpers.

Weiterhin betrachten wir den Fall, daß der Vektor der Relativverschiebung δb der beiden Schnitthufer von f überall senkrecht zur Fläche f steht. Wir führen die Operation durch, indem wir entweder in den durch Aufschneiden entstandenen Schlitz (gleichartige) Materie etwa der Form von Abb. 1 einzwängen oder von einem Schnitthufer Materie etwa der gleichen Form abtragen und danach beide Schnitthufer wieder zusammenpressen. Am Schluß wird alles verschweißt. Wir betrachten jetzt den ursprünglichen Körper plus die eingezwängte bzw. minus die abgetragene Materie als einheitlichen verformten Körper.

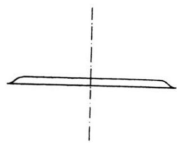


Abb. 1. Querschnitt einer z. B. rotationssymmetrischen Einzwängung.

Dieser unterscheidet sich nach dem COLONNETTischen Satz von dem ursprünglichen, unverformten Körper um ein Volumen von der Größe der Einzwängung bzw. Abtragung. Wir nennen diese Art der Eigenspannungserzeugung daher nicht-konservativ.

Von besonderer Bedeutung ist nun der Fall, daß die Relativverschiebung δb fast über die ganze Fläche f konstant ist und am Rande der Fläche – wo diese nicht auf der Oberfläche des Körpers endet – sehr rasch (exponentiell) auf Null abfällt. Dann kann man die konservative Eigenspannungserzeugung als eine Gleitung der beiden Schnitthufer übereinander hinweg beschreiben. Solche Gleitungen finden im festen Körper statt, wenn man ihn durch so starke Kräfte auf Schub beansprucht, daß die Fließgrenze überschritten wird. Die Gleitung erfolgt jedoch nicht auf der ganzen Fläche f gleichzeitig, sondern es gleiten nacheinander infinitesimale Bereiche df der Fläche, da dies energetisch günstiger ist. Die Grenzlinie zwischen dem bereits abgeglittenen und noch nicht abgeglittenen Bereich einer Fläche f heißt Versetzungslinie, und man beschreibt den Gleitvorgang heute als das konservative Vordringen (Gleiten) einer Versetzungslinie.

Bei einer sehr starken hydrostatischen Komponente der äußeren Beanspruchung und bei genügend

hoher Temperatur kann indessen auch die oben beschriebene nicht-konservative Eigenspannungserzeugung erfolgen, da in diesem Falle, wie gesehen, das Volumen des Körpers geändert wird. Die hierzu z. B. im Falle der Volumenvergrößerung benötigte Materie wird der Umgebung der Eigenspannungsquelle durch Diffusion von Atomen entzogen (deshalb höhere Temperatur!), der Körper wird „plastisch verdünnt“. Man hat am Ende mehr oder weniger gleichmäßig verteilte Gitterlücken, die zum Volumen des verformten Körpers mitgezählt werden müssen. Durch die Schaffung solcher Gitterlücken kann also ein Körper einem allseitigen Zug plastisch nachgeben¹⁵. Eine der Zahl der Gitterlücken gleiche Zahl von Atomen findet man am Ende des Vorgangs als neugebildete (Teil-)Netzebenen in dem Körper wieder. Diese Netzebenen entsprechen also der Schlitzmaterie von oben (Abb. 1). Das Anwachsen solch einer Netzebene wird als das nicht-konservative Vordringen (Klettern) einer (Stufen-)Versetzung beschrieben, welche die Grenzlinie der „Extra“-Netzebene bildet.

Wenn nun die Fläche f , längs derer die Versetzung gewandert ist (ihre „Wanderfläche“), durch den ganzen Körper hindurchgeht, ist die Versetzung am Ende nicht mehr in dem Körper. In diesem Falle gibt es auch keine Eigenspannungen. Diese treten vielmehr nur dann auf, wenn die Fläche mindestens teilweise im Innern des Körpers endet. Da außerdem in jedem Fall f nach erfolgter Wanderung experimentell nicht mehr auffindbar ist, hat man als Quelle der Eigenspannungen offenbar die Versetzung anzusehen. Demnach sind die Eigenspannungen von dem Weg, den die Versetzung zurückgelegt hat, prinzipiell unabhängig. Maßgebend ist vielmehr allein der Linienverlauf der Versetzung und die Relativverschiebung δb . Der Versetzungslinie ordnen wir einen solchen Richtungssinn zu, daß sie die positive Richtung π der Fläche f im Rechtsschraubensinn umläuft¹⁶.

Die plastische Verformung erfolgt nun immer so, daß sich am Ende des Vorgangs eine große Zahl von Versetzungen in dem Körper befindet. Über den Versetzungszustand des Materials ist man dann vollkommen orientiert, wenn man den Verlauf und den BURGERS-Vektor jeder Versetzungslinie angeben

¹⁴ F. R. N. NABARRO, Phil. Mag. **42**, 213 [1951].

¹⁵ Zum Mechanismus der Bildung von Gitterlücken vgl. außer den unter² zitierten Arbeiten auch F. SEITZ, Adv. Phys. **1**, 43 [1952].

¹⁶ Mit der hier beschriebenen Vorzeichenkonvention befinden wir uns in Übereinstimmung mit der von J. M. BURGERS, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **42**, 293, 378 [1939] und SEEGER² benützten. In den bisherigen Arbeiten des Verfassers war das Vorzeichen entgegengesetzt festgelegt.

kann. So detaillierte Kenntnisse kann man sich natürlich bei den riesigen in Betracht kommenden Zahlen der Versetzungen nicht verschaffen, und man hat daran auch kein Interesse. Für unsere (makroskopische) Eigenspannungstheorie sind wir zufrieden, wenn wir an jedem Punkt den Gesamt-BURGERS-Vektor^{16a} (Versetzungsfluß) \mathfrak{b}^F aller, eine (genügend kleine) beliebig gerichtete Fläche F durchstoßenden Versetzungslinien kennen. Dies verlangt die Kenntnis der Versetzungsdichte α , welche durch die Gleichung

$$\mathfrak{b}^F = \iint_F d\vec{f} \cdot \alpha \quad (6)$$

zu definieren ist. Wegen des Vektorcharakters von \mathfrak{b}^F und $d\vec{f}$ ist α ein (asymmetrischer) Tensor 2. Stufe, und wir können dessen cartesische Komponenten α_{ij} an einem Punkt r daher als Versetzungslinien auffassen, die an dem betr. Punkt in i -Richtung verlaufen und deren BURGERS-Vektor in j -Richtung zeigt¹⁷. Bei $i=j$ hat man Schraubenversetzungen, sonst Stufenversetzungen.

Abb. 2 zeigt einen Körper, in den eine kleine Zahl von Versetzungen hineingelaufen ist. Die Spuren ihrer Wanderflächen f in der Papierebene sind durchgezogen gezeichnet, wenn die am Ende jeder Schnittfläche sitzende Versetzung die Fläche F durchstößt, andernfalls gestrichelt. Die F durchstoßenden Versetzungen sollen einen solchen Richtungssinn erhalten, daß ihre Wanderflächen f von der willkürlich orientierten Randlinie \mathfrak{R} von F in ihrer positiven Richtung durchsetzt werden.

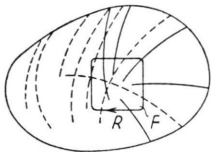


Abb. 2.

Den Gesamt-BURGERS-Vektor \mathfrak{b}^F der F durchstoßenden Versetzungen erhält man dann*, wenn man längs \mathfrak{R} einmal herumgeht und an jeder Schnittfläche die Relativverschiebung des auf der positiven Seite von \mathfrak{R} gelegenen Schnittufers gegenüber demjenigen auf der negativen Seite addiert. Hierbei durchschreitet man die gestrichelten Schnittflächen je zweimal in entgegengesetztem Sinne, so daß keine von diesen etwas beiträgt.

^{16a} Zur Definition des BURGERS-Vektors s. nächsten Absatz.

¹⁷ Orientiert man auch noch die Fläche F senkrecht zur i -Richtung, so bedeutet dies nach Gl. (6), daß die Versetzungslinien das Flächenelement $d\vec{f}$ senkrecht durchstoßen. Es ist damit natürlich nicht gesagt, daß die realen Verset-

Wir nehmen nun als erstes an, daß alle an der plastischen Verformung beteiligten Versetzungen am Ende des Vorgangs entweder aus dem Körper ausgetreten sind oder sich gegenseitig annihiliert haben. Im Sinne einer makroskopischen Eigenspannungstheorie gelten dabei zwei Versetzungen entgegengesetzten Vorzeichens schon dann als annihiliert, wenn sie sich so nahe gekommen sind, daß sich die weitreichenden Anteile ihrer Spannungsfelder aufheben. In diesem Fall ist $\alpha=0$, und die Summation über die Verschiebungssprünge ergibt, wenn die Wanderflächen dicht liegen,

$$\mathfrak{b}^F = \oint_{\mathfrak{R}} d\vec{b} = \oint_{\mathfrak{R}} d\vec{r} \cdot \text{Grad } \mathfrak{b} = 0 ;$$

dann existiert ein stetiges Vektorfeld \mathfrak{b} , das offenbar die „plastische Verschiebung“ der einzelnen Punkte des Mediums mißt.

Wir definieren nun als „plastische“ oder „eingeprägte“ Distorsion eines Volumenelements diejenige (spannungsfreie) Distorsion, welche das Element zeigt, wenn es von einer homogenen Schar von Versetzungen durchwandert und bei der damit verbundenen Verformung nicht durch die Nachbarelemente gehindert wurde. Den Tensor der plastischen Distorsion nennen wir $\epsilon^P \equiv (\epsilon_{ij}^P)$. Seine Diagonalkomponenten sind plastische (spannungsfreie) Dehnungen (Abb. 3a), die übrigen Komponenten plastische (spannungsfreie) Scherungen (Gleitungen, Abb. 3b), wobei der erste Index von ϵ_{ij}^P die

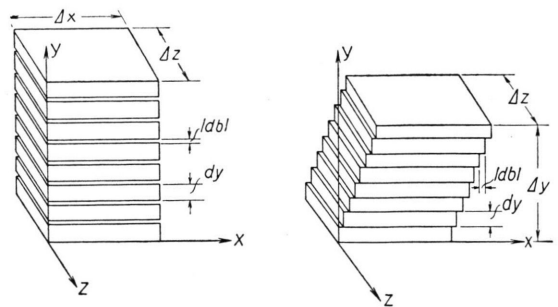


Abb. 3. Distorsion eines Volumenelementes $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ nach Durchwanderung einer homogenen Versetzungsschar.

Die Kristallorientierung bleibt erhalten.

a) Die Lücken sind mit Materie ausgefüllt zu denken, die durch Diffusion aus der Umgebung herbeigeht.

plastische Dehnung ist $\epsilon_{yy}^P = db_y/dy$.

b) Der Scherwinkel ist $\epsilon_{yx}^P = db_x/dy$.

zungslinien dies wirklich tun. Bei unserer makroskopischen Betrachtungsweise brauchen wir indessen hierauf nicht zu achten.

* per definitionem.

Gleitebene charakterisiert, der zweite die Gleitrichtung. Die Kristallorientierung bleibt bei der plastischen Distorsion des Volumenelements erhalten.

Da nun in unserem Beispiel F, μ, α Null sind, gibt es nach der Versetzungswanderung im einfach zusammenhängenden Körper auch keine Spannungen (Ziff. 1)¹⁸. Das kommt daher, daß sich in diesem Fall, wie wir gleich noch sehen werden¹⁹, die einzelnen Volumenelemente bei der plastischen Verformung nicht behindern. Demnach bleibt auch die Kristallorientierung überall erhalten, Krümmungen der Netzebenen treten nicht auf. Das heißt aber, es ändert sich bei dieser Art plastischer Verformung nicht der Zustand des Mediums, sondern nur seine Form. Der zugehörige plastische Distorsionstensor ist $\epsilon^P = \text{Grad } \mathfrak{h} \equiv (d\mathfrak{h}_j/dx_i)$ (Abb. 3).

Dies alles wird anders, wenn wir nun annehmen, daß während der Verformung die Versetzungen im Medium mit einer Dichte α stecken bleiben. Wir wollen, wie oben, den zugehörigen Versetzungsfluß \mathfrak{h}^F durch eine Fläche F messen. Dieser ist natürlich davon unabhängig, wie sich innerhalb der Fläche F die einzelnen Versetzungen verteilen, ferner, wie wir oben gesehen haben, auf welchem Wege sie an ihren Platz hingekommen sind. In Abb. 4a ist daher angenommen, daß eine große Zahl von Versetzungen auf geradem Wege von oben links herangewandert und dann in konstanter Dichte längs der zu F senkrechten Flächen, deren Spuren wir gezeichnet haben, stehen geblieben sind. Die Wanderflächen der Versetzungen sind in Abb. 4 nicht gezeichnet.

Abb. 4b zeigt die plastischen Distorsionen der Volumenelemente $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ unter der Annahme, daß diese vor der Versetzungswanderung auseinander geschnitten waren (sich daher bei ihrer plastischen Verformung gegenseitig nicht behinderten), und daß der BURGERS-Vektor aller Versetzungen die y -Richtung hatte. Wir sehen, daß die Volumenelemente durch die plastische Distorsion ihren Zusammenhang verloren haben, und zwar immer dort, wie man sich leicht klar macht, wo Versetzungen stehen geblieben sind. Dadurch ist das Vektorfeld \mathfrak{h} unstetig geworden, und man kann die plastische Distorsion nicht mehr im ganzen Körper durch $\text{Grad } \mathfrak{h}$ beschreiben. Wohl kann man dies aber noch im einzelnen Volumenelement, so daß man auch im

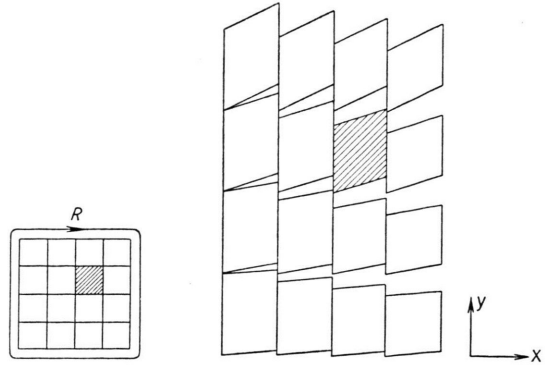


Abb. 4. Fläche F von Abb. 2. Schnittzeichnung. Alle Versetzungen mögen in z -Richtung verlaufen und ihr BURGERS-Vektor in y -Richtung zeigen.

a) Die Versetzungen sind längs der Ebenen, deren Spuren gezeichnet sind, stecken geblieben. Die von der Versetzungswanderung hervorgerufene Distorsion ist nicht gezeichnet. Schraffiert: Ein Volumenelement $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$.

b) Es ist angenommen, daß die Volumenelemente vor der Versetzungswanderung auseinander geschnitten waren. Dann haben sie den Zusammenhang verloren, weil die oberen Elemente von mehr Versetzungen durchwandert und demnach stärker gesichert wurden als die unteren, während aus demselben Grunde die linken Volumenelemente stärker gedehnt wurden als die rechten.

Fall $\alpha \neq 0$ im Randintegral $d\mathfrak{h}$ durch $dr \cdot \epsilon^P$ ersetzen darf. Man erhält so

$$\mathfrak{h}^F = \int_F d\mathfrak{f} \cdot \alpha = \oint_{\mathfrak{R}} dr \cdot \epsilon^P \quad (7)$$

und mit dem STOKESSchen Satz, da ϵ^P natürlich stetig variiert,

$$\int_F d\mathfrak{f} \cdot (\text{Rot } \epsilon^P - \alpha) = 0. \quad (8)$$

Da dies für beliebige Flächen F gelten muß, ist

$$\text{Rot } \epsilon^P = \alpha. \quad (9)$$

Diese Gleichung ist die Antwort der Geometrie auf das von der Physik gestellte Ansinnen, die plastische Verformung nicht durch starre Relativverschiebung ganzer Flächen, sondern (energetisch günstiger) immer nur kleinster Flächenstücke nacheinander, d. h. durch Versetzungswanderung erfolgen zu lassen: Der erste Index von ϵ_{ij}^P gibt die Normalenrichtung der Wanderflächen an, der erste Index von α_{ij} die Richtung der Versetzungslinien. Ande-

¹⁸ Für den mehrfach zusammenhängenden Körper gilt dies nicht, wie das Beispiel der VOLTERRASchen Distorsionen am Hohlzylinder zeigt. Indessen kann man diesen scheinbaren Ausnahmefall leicht durch die Bemerkung erledigen, daß

hier z. B. in den Hohlrohren fiktive Versetzungen anzunehmen und als Ursache der Spannungen anzusehen sind.

¹⁹ Man vgl. die zu Abb. 4 gemachten Bemerkungen.

rerseits ist jede Randlinie einer Fläche gewissermaßen deren Wirbellinie²⁰. Demnach besagt Gl. (9) für eine einzelne Versetzungslinie, daß diese die Randlinie ihrer Wanderfläche ist, ferner, daß die Änderung der Relativverschiebung am Rande der Wanderfläche gleich dem BURGERS-Vektor der Versetzung ist.

Bei der wirklichen plastischen Verformung werden die Volumenelemente vor der Versetzungswanderung natürlich nicht auseinander geschnitten und bleiben daher im Gegensatz zu Abb. 4b zusammenhängend. Dies ist nur so denkbar, daß bei der plastischen Distorsion zugleich elastische Distorsionen erzwungen werden, die für das Kompaktbleiben des Körpers sorgen. Der zugehörige elastische Distorsionstensor ϵ enthält in seinem symmetrischen Teil spannungserzeugende Deformationen, sein antisymmetrischer Teil stellt starre Drehungen der Volumenelemente dar, bei denen offenbar zugleich die Kristallstruktur mitgedreht wird. Demnach ist ϵ mit dem in Ziff. 2 definierten Distorsionstensor identisch²¹.

Insgesamt erfahren somit die Volumenelemente eine Distorsion $\epsilon + \epsilon^P$, und da der Körper am Anfang und Ende kompakt ist, muß

$$\text{Rot}(\epsilon + \epsilon^P) = 0 \quad (10)$$

sein. Diese Gleichung besagt ja gerade, daß das Tensorfeld der Gesamtdistorsionen $\epsilon + \epsilon^P$ aus einem Vektorfeld der (Gesamt-)Verschiebungen ($\tilde{s} + \tilde{s}^P$) durch Gradientenbildung abzuleiten ist; d. h. man kann jedem Punkt eine zusammengesetzte plastisch-elastische Verschiebung zuordnen, und das Vektorfeld der Verschiebungen ist stetig im ganzen Körper. Dies ist bekanntlich die Bedingung dafür, daß nach der gesamten Verformung der Körper noch

kompakt ist. Im Falle $\alpha = 0$ wird \tilde{s}^P mit \tilde{b} identisch und $\tilde{s} = 0$.

Aus Gln. (9) und (10) folgt sofort die geometrische Grundgleichung (2)²², welche (von der genannten uninteressanten starren Drehung abgesehen) nur noch Zustandsgrößen enthält, im Gegensatz zu Gl. (9), in der ϵ^P keine Zustandsgröße ist, da sie einen Anteil $\text{Grad } \tilde{s}^P$ enthält, der zwar die Form, nicht aber den Zustand des Körpers ändert. Daß sich hier eine ganz natürliche Einteilung der gesamten Distorsion in eine zustandsändernde und eine den Zustand nicht ändernde ergeben hat, ist sicher ein wichtiges Ergebnis unserer Theorie. Es zwingt uns dazu, Informationen darüber zu sammeln, ein wie großer Teil der gesamten Distorsion ohne Zustandsänderung erfolgt. Nach den bisherigen Forschungen² ist dieser Anteil in vielen Fällen sicher ziemlich groß²³.

Für unsere weiteren Untersuchungen benötigen wir noch die Gleichung für die Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen Medien I und II (oder auch zwischen zwei Teilen I und II desselben Mediums). Diese Gleichung ist natürlich eine Folge von Gl. (2) oder (9). Sie läßt sich genau wie diese in elastischen oder plastischen Distorsionen schreiben. Wir führen nur die letztere Form an. Ist n der Normaleinheitsvektor der Grenzfläche in Richtung von I auf II, $\beta \equiv (\beta_{ij})$ die (tensorielle) Flächendichte der Versetzungen, so gilt²⁴

$$n \times \epsilon^P|_I - n \times \epsilon^P|_{II} = -\beta. \quad (11)$$

In dem uns am meisten interessierenden Fall, wo diese Gleichung zur Anwendung kommt, hat ϵ^P in I und II die Form $\text{Grad } \tilde{s}^P$, dann wird²⁵

$$\beta = n \times \nabla (\tilde{s}_I^P - \tilde{s}_{II}^P) \equiv -n \times \nabla \tilde{b}, \quad (12)$$

²⁰ Dieser aus der Differentialgeometrie bekannte Satz ist auch anschaulich gut zu verstehen: Am Rand der Fläche springt der Normalenvektor der Fläche auf Null. Infolgedessen muß er dort eine (längs der Randlinie verlaufende) Wirbellinie haben.

²¹ Die Bezeichnung „elastisch“ trifft genau genommen nur auf die Deformationen zu. Es ist aber bequem, den ganzen Distorsionstensor ϵ im Gegensatz zu ϵ^P als elastisch zu bezeichnen.

²² Gl. (2) wurde zuerst von BILBY, BULLOUGH und SMITH und von KRÖNER angegeben. Man vgl. hierzu die Arbeiten: B. A. BILBY, Rep. Conf. in Cryst. Solids, Bristol 1955, S. 124; B. A. BILBY, R. BULLOUGH u. E. SMITH, Proc. Roy. Soc., Lond. A **231**, 263 [1955]; E. KRÖNER, Z. Phys. **142**, 463 [1955]; E. KRÖNER u. G. RIEDER, Z. Phys. **145**, 424 [1956]. An der oben gegebenen Ableitung hat Herr RIEDER wesentlichen Anteil.

²³ In Wirklichkeit wird der Zustand des Mediums auch durch eine (makroskopische) plastische Distorsion $\text{Grad } \tilde{s}^P$ geändert, da nur ein Teil dieser Distorsion so erfolgt, daß sich Versetzungen entgegengesetzten Vorzeichens auch *mikroskopisch* annihilieren. Die nur *makroskopisch* annihilierten Versetzungen bleiben indessen im Material und wirken so z. B. als Hindernisse für die weitere plastische Verformung. Sie tragen damit wesentlich zur Verfestigung des Materials bei und müssen bei einer vollständigen Beschreibung des Zustands irgendwie mit angeführt werden.

²⁴ Man vgl. den in Kürze erscheinenden Bericht: „Kontinuumstheorie der Versetzungen“ in der Reihe „Berichte über angewandte Mathematik“ (Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg), wo Verf. über den heutigen Stand der Theorie einschließlich der mathematischen Methoden zur Lösung der anfallenden Probleme, sowie über Anwendungen berichtet wird.

²⁵ Diese Gleichung gilt auch bei allgemeinerem ϵ^P , worauf wir hier aber nicht eingehen wollen. Man vgl. Anm. ²⁴.

wenn wir den Verschiebungssprung in der Grenzfläche $\tilde{s}_{II}^P - \tilde{s}_I^P$ sinngemäß mit \mathbf{b} bezeichnen. Gl. (12) gibt an, daß und in welcher Anordnung Versetzungen in einer Fläche liegen müssen, die einen nicht konstanten Verschiebungssprung \mathbf{b} aufweist.

3. Verschiebungsdipol und Kräftedipol als Kenngrößen der punktförmigen Gitterfehlstellen

Wir haben in der letzten Ziffer die Erzeugung von Eigenspannungen durch Aufschneiden und plastische Relativverschiebung als Bildung und Wanderung von Versetzungslinien beschrieben. Insbesondere konnte die Einzwängung dünner Materieschichten auf diese Weise behandelt werden^{25a}. Mit Hilfe von drei zueinander senkrechten, dicht liegenden Scharen von Wanderflächen kann man so jede beliebige plastische Distorsion ϵ^P und damit auch beliebige Eigenspannungen erzeugen. Die elementare Operation, auf die jede Eigenspannungserzeugung zurückgeführt werden kann, ist somit die Bildung einer infinitesimalen Versetzungsschleife (als Randlinie des Flächenelements df , Ziff. 2), FRANK und READ² haben gezeigt, daß sich bei Schubbeanspruchung in einem Kristall relativ leicht (makroskopisch) infinitesimale Versetzungsschleifen konservativ bilden können. Es spielen jedoch auch Einzwängungen von Materie im Kristall eine bedeutende Rolle. Als elementare Einzwängung sind vor allem Atome auf Zwischengitterplätzen und Fremdatome mit einem erhöhten (oder erniedrigten) Raumbedarf auf regulären Gitterplätzen zu nennen. Wir wollen in dieser Ziff. eine passende mathematische Beschreibung dieser punktförmigen Gitterfehler geben und in der nächsten Ziff., von der Vorstellung einer solchen Fehlstelle als infinitesimale Versetzungsschleife ausgehend, die wichtigsten Formeln für die Wechselwirkung einer Fehlstelle mit den elastischen Feldern des Kristalls aufstellen.

Denken wir uns noch einmal das Materiestück der Abb. 1 in einem Schlitz längs einer Fläche f ein-

gezwängt. Der Vektor \mathbf{b} , der die dadurch hervorgerufene eingeprägte Relativverschiebung der Schnittufer von f beschreibt, möge wieder – von einem sehr schmalen Randstreifen abgesehen – über f konstant sein, jedoch diesmal von endlichem Betrag $|\mathbf{b}|$. Dann wird die Einzwängung durch Angabe des eingezwängten Materials und durch das Produkt $f \mathbf{n}_i \mathbf{b}_j$ vollkommen gekennzeichnet. Wir lassen nun f immer kleiner, dabei gleichzeitig $|\mathbf{b}|$ immer größer werden, so daß das Produkt $f |\mathbf{b}|$ endlich bleibt und $f \mathbf{n}_i \mathbf{b}_j$ gegen den Wert Q_{ij} strebt. Bei der oben betrachteten, nicht konservativ gebildeten Versetzungsschleife ist $i=j$. Indessen sieht man leicht, daß man die konservativ gebildete Schleife ($i \neq j$) genauso darstellen kann. Danach ist offenbar Q_{ij} als (dyadisches) Produkt zweier Vektorkomponenten die Komponente eines (asymmetrischen) Tensors 2. Stufe $Q \equiv (Q_{ij})$. Wir nennen ihn den „Verschiebungsdipol“²⁶.

In diesem Verschiebungsdipol sind also (an der gleichen Stelle im Körper) nicht konservativ und konservativ gebildete Versetzungsschleifen als diagonale bzw. nicht diagonale Komponenten eines Tensors zusammengefaßt. Die Tatsache, daß man eine infinitesimale Versetzungsschleife auch als Verschiebungsdipol beschreiben kann, ist schon länger bekannt^{26a} und entspricht dem aus der Theorie der elektrischen Ströme bekannten Sachverhalt, nach dem eine infinitesimale Stromschleife (AMPERESCHER Kreisstrom) mit einem magnetischen Dipol äquivalent ist. Wenn wir in unserer Überschrift nicht den Verschiebungsdipol, sondern die Versetzung als elementare Eigenspannungsquelle bezeichnet haben, so geschieht dies in demselben Sinn, wie in der MAXWELLSCHEN (stationären) Theorie der elektrische Strom als Ursprung des Magnetfeldes angesehen wird; dieser kommt in den MAXWELLSCHEN Gleichungen vor, nicht aber der magnetische Dipol. In den Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik haben wir gleichermaßen die Versetzung stehen, nicht aber den Verschiebungsdipol^{26b}.

^{25a} Offenbar hat man auch Gebiete höherer Temperatur innerhalb einer kühleren Umgebung als Einzwängung anzusehen und kann zur Beschreibung des elastischen Zustands dieselben Wege gehen wie bei den eigentlichen Eigenspannungen. ϵ^P ist dann diejenige (symmetrische) Distorsion, die das Volumenelement durch die betr. Temperaturerhöhung spannungsfrei erleidet, wenn es bei der Ausdehnung nicht von seinen Nachbarn gestört wird. Ähnliches gilt für die Magnetostriktion (RIEDER⁷).

²⁶ Diese Bezeichnung wird u. a. dadurch gerechtfertigt, daß das von dem Verschiebungsdipol hervorgerufene Verschiebungsfeld nach Gl. (14) im Unendlichen wie $1/r^2$ verschwindet.

^{26a} Vgl. F. R. N. NABARRO, Phil. Mag. **42**, 1224 [1951].

^{26b} Genau genommen hat man die Versetzung nicht als Eigenspannungsquelle, sondern nach Gl. (2) als „Distorsionswirbel“ zu bezeichnen. Die Überschrift dieser Arbeit bedeutet eine gewisse, nicht ganz unproblematische Konzession gegenüber der geläufigen Bezeichnung „Eigenspannungen“. Man vgl. Anm. ²⁴.

Liegen längs einer – nun wieder ausgedehnten – Fläche f viele solcher Elementardipole nah beieinander, so ist es oft sinnvoll, über diese zu mitteln und sie als eine Dichte von infinitesimalen Dipolen zu beschreiben. Der einzelne infinitesimale Dipol wird dann durch $n_i b_j df$ gekennzeichnet, wo $|b|$ jetzt endlich ist. Die Flächendichte der Dipole ist dabei $n_i b_j$.

Wir vergleichen diese Ausdrücke mit einer wohl von FREDHOLM und GEBBIA²⁷ stammenden Formel, welche das elastische Verschiebungsfeld angibt, das von einer flächenhaften Verschiebungsdipolbelegung im Innern eines unendlich ausgedehnt gedachten Mediums hervorgerufen wird. Nach BURGERS (l.c.¹⁶) ist dies bei konstantem b_j zugleich das von einer längs der Randlinie der Dipolfläche verlaufenden Versetzungslinie mit BURGERS-Vektor b herrührende Verschiebungsfeld. Die genannte Formel lautet:

$$\xi_m(\mathbf{r}) = - \int_{f'} d\mathbf{f}' n_i b_j c_{ijkl} \nabla_k S_{lm}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (13)$$

Das Verschiebungsfeld eines einzelnen Dipols ist demnach

$$\xi_m(\mathbf{r}) = - Q_{ij}(\mathbf{r}') c_{ijkl} \nabla_k S_{lm}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (14)$$

Dabei ist $\mathbf{S} \equiv (S_{lm})$ das sog. Fundamentalintegral der elastischen Differentialgleichungen für die Verschiebungen, definiert dadurch, daß in dem unendlich ausgedehnt gedachten Medium

$$\mathfrak{S}_i(\mathbf{r}) = \mathfrak{S}_j(\mathbf{r}') S_{ji}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (15)$$

das von einer im Punkte \mathbf{r}' wirkenden Einzelkraft $\mathfrak{S} \equiv (\mathfrak{S}_i)$ herrührende Verschiebungsfeld sein soll²⁸. \mathbf{S} genügt der Differentialgleichung

$$c_{jkl} \nabla_i \nabla_k S_{lm}(\mathbf{r}) = \delta(0) \delta_{jm}, \quad (16)$$

wo $\delta(0)$ die (dreidimensionale) DIRACsche Deltafunktion ist. Bildet man in bekannter Weise²⁹ aus zwei Kräften entgegengesetzter Richtung einen Kräfte-dipol $P_{ij} = x_i \mathfrak{S}_j$ (man läßt x_i gegen 0 und \mathfrak{S}_j gegen ∞ gehen), so wird dessen Verschiebungsfeld durch

$$\xi_i(\mathbf{r}) = P_{jk}(\mathbf{r}') \nabla_j S_{ki}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (17)$$

gegeben. Die Diagonalkomponenten des asymmetrischen Tensors $\mathbf{P} \equiv (P_{ij})$ sind „Doppelkräfte ohne

Moment“, die übrigen Komponenten „Doppelkräfte mit Moment“ um die zu i und j senkrechte Achse²⁹.

Aus den Gln. (14) und (17) ist folgendes zu entnehmen:

1. Ist Q_{ij} ein antisymmetrischer Tensor, so ergeben sich wegen der Symmetrie von c_{ijkl} [Gl. (3')] keine elastischen Verschiebungen, also auch keine Spannungen. Als Beispiel für das Vorkommen solcher „Drehzentren“ wäre z. B. ein sehr kleiner Bereich in einem Kristall zu nennen, der gegen seine Umgebung gedreht und durch eine Feinkorn Grenze abgegrenzt ist. In solch einem Fall beobachtet man makroskopisch keine Spannungen. Mikroskopisch treten Spannungen deshalb auf, weil die die Korngrenze aufbauenden Versetzungen endliche Stärke haben³⁰. Nach dem Vorangegangenen hat man Q_{ij} offenbar als singuläre (plastische) Distorsion ϵ_{ij}^P bzw. ϵ_{ij}^P als eine räumliche Dipoldichte aufzufassen (beachte auch die Dimensionen!). Im Falle reiner Antisymmetrie ist nach Ziff. 2 ϵ_{ij}^P gleich $-\epsilon_{ij}$. Die Spannungsfreiheit der rein antisymmetrischen Distorsion hatten wir schon in Ziff. 1 hervorgehoben.

2. Bei rein antisymmetrischem Kräfte-dipol hat man nur Doppelkräfte mit Moment. Solch ein Dipol ist nichts weiter als ein von außen wirkendes (singuläres) Drehmoment. Auf einen kleinen ferromagnetischen Einschluß in einem sonst nicht ferromagnetischen Kristall kann solch ein makroskopisch singuläres Drehmoment durch ein Magnetfeld in der in Ziff. 1 beschriebenen Weise ausgeübt werden.

3. Für den wichtigsten Fall, nämlich den symmetrischen Verschiebungsdipol Q_{ij}^S gibt der Vergleich von Gl. (14) mit (17) (bei Homogenität der elastischen Konstanten auch in der unmittelbaren Umgebung des Dipols s. u.)

$$P_{ij}^S = -c_{ijkl} Q_{kl}^S, \quad (18)$$

d. h. jeder symmetrische Verschiebungsdipol Q_{ij}^S wirkt elastisch so, als sei an der betreffenden Stelle ein symmetrischer Kräfte-dipol P_{ij}^S eingepreßt. Natürlich kann man die symmetrischen Tensoren \mathbf{Q}^S und \mathbf{P}^S auf Hauptachsen transformieren, was nach obigem bedeutet, daß sie rein nicht-konservativ gebildet werden können, während der antisymmetrische Dipol Q_{ij}^A konservativ gebildet wird. Hierauf beruht es,

²⁷ I. FREDHOLM, Acta math. Stockh. **23**, 1 [1900]; M. GEBBIA, Ann. math. III. **7**, 141, [1902]; vgl. auch SEEGER².

²⁸ Wegen des Tensors \mathbf{S} bei elastischer Anisotropie vgl. z. B. E. KRÖNER, Z. Phys. **136**, 402 [1953].

²⁹ Siehe z. B. A. E. H. LOVE, The Math. Theory of Elast. Cambridge, University Press 1926, deutsch von A. TIMPE, Berlin, Teubner 1907.

³⁰ Daß Korngrenzen mit flächenhaften Versetzungsanordnungen identisch sind, beruht letzten Endes auf Gl. (12).

daß alle elementaren Einzwängungen weitgehend durch \mathbf{Q}^S und \mathbf{P}^S beschrieben werden können. Da man die Nicht-Diagonalkomponenten von \mathbf{P}^S wegtransformieren kann, übt der symmetrische Kräfte-dipol kein Drehmoment aus.

Wir wollen nun sehen, wie der symmetrische Verschiebungs- und Kräftedipol im Kristall zu verstehen sind. Betrachten wir z. B. das eingezwängte Atom der Abb. 5 a. Es verursacht eine (eingeprägte) Relativverschiebung des oberen und unteren Nachbaratoms, deren Betrag gleich $d^z - (a - d)$ ist. (Bezeichnungen s. Abb. 5. Auch die übrigen Atome erleiden eine Verschiebung, die aber nicht eingepreßt ist,

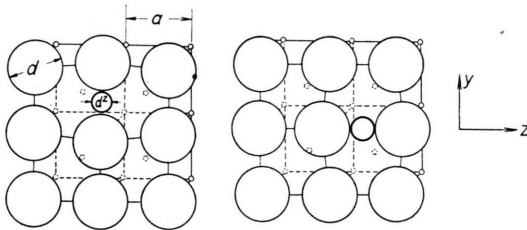


Abb. 5. a) Zwischengitteratom im kubisch raumzentrierten Kristall, zugleich Modell für Kohlenstoffatom im Eisengitter. Der Übersichtlichkeit halber sind nur die Atome der vorderen (001)-Ebene in ihrer ganzen Größe gezeichnet. Für $d = a\sqrt{3}/2$ berührt jedes Atom seine 8 nächsten Nachbarn.

b) Dasselbe nach Platzwechsel des Zwischengitteratoms.

sondern nur die elastische Reaktion darstellt.) Die Schnittfläche f von früher ist in diesem Fall senkrecht zur y -Achse und der Größe nach zwischen a^2 und $\pi d^2/4$. Man sieht, daß der Verschiebungsdipol aus der groben Vorstellung von Atomen mit einem bestimmten Atomdurchmesser heraus nur ziemlich unsicher angegeben werden kann. Falls $d^z \gg a - d$ ist, erhält man einen Verschiebungsdipol mit der einzigen Komponente $Q_{yy} \sim d^2 d^z$. Hieraus folgt mit Hilfe von Gl. (18) der zugehörige Kräftedipol wiederum bestenfalls mit grober Näherung, da Gl. (18) nur gilt, wenn man Einzwängung und Umgebung die gleichen elastischen Konstanten zuordnen kann. Es ist ja schon anschaulich klar, daß z. B. eine sehr harte Einzwängung bei gleichem Verschiebungsdipolmoment einen wesentlich stärkeren Kräftedipol darstellt als eine sehr weiche.

Weiterhin untersuchen wir den Fall, daß in einem dichtest gepackten Gitter eines der regulären Atome (Durchmesser d) durch ein mehr Raum beanspru-

chendes Fremdatom (Durchmesser d^F) ersetzt worden ist. Man betrachtet zweckmäßig das Fremdatom als eingezwängte Kugel, der Verschiebungssprung in der Grenzfläche ist $\mathfrak{h} = (d - d^F) \pi$, der Verschiebungsdipol berechnet sich zu

$$Q_{ij} = \int \int n_i (d - d^F) n_j df = \frac{\pi}{3} d^2 (d - d^F) \delta_{ij}.$$

Falls das Fremdatom die gleichen elastischen Konstanten wie die Umgebung hat, können wir mit Gl. (18) den zugehörigen Kräftedipol bestimmen. Man beachte, daß dann nur im Fall des kubischen Gitters auch $P_{xx} = P_{yy} = P_{zz}$ ist, d. h., hier kommt es bei der Bestimmung des Kräftedipols nur auf den Kompressionsmodul, nicht auf die Schubmoduln an. Im hexagonalen Kristall kann somit ein Fremdatom nicht als „Dilatationszentrum“ $-P_{ii}$ ²⁹ beschrieben werden.

Im allgemeinen ist nicht allein Q_{ij} nur unsicher bekannt, sondern es ist auch die Homogenität der elastischen Konstanten an der betreffenden Stelle so stark gestört, daß Gl. (18) zusammenbricht. Den richtigen Kräftedipol kann man dann auf theoretischem Wege in günstigen Fällen durch Lösung eines elastischen Randwertproblems³¹, sonst nur mit Hilfe elektronentheoretischer Rechnungen bekommen, indem man das Gebiet (I) um die betreffende Eigenstressquelle herum, in welchem die elastischen Verzerrungen nicht dem HOOKESCHEN Gesetz (mit den in großem Abstand gemessenen Elastizitätsmoduln) gehorchen, elektronentheoretisch behandelt, das übrige Medium (II) aber elastizitätstheoretisch, wobei dann an der Grenzfläche zwischen I und II die maßgebenden Anschlußbedingungen erfüllt werden müssen.

Genau wie im analogen elektrischen Fall wird eine „punktförmige“ Gitterfehlstelle im allgemeinen durch Angabe ihres Kräftedipols (elastisch) nur unvollkommen beschrieben. Vor allem bei stärkerer Asymmetrie muß man ihren Quadrupolcharakter usw. berücksichtigen; ferner ist in vielen Fällen die wohl zuerst von ESHELBY³² in diesem Zusammenhang untersuchte „elastische Polarisierbarkeit“ eines Gitterfehlers im elastischen Feld wichtig (s. Ziff. 4). Erst diese Kenngrößen zusammen bestimmen die elastische Wechselwirkung des Gitterfehlers mit den elastischen Feldern des Kristalls. Wegen deren großer Bedeutung für viele Vorgänge im festen Körper

³¹ Vgl. den letzten Absatz dieser Ziffer und Ziffer 4.

³² J. D. ESHELBY, Phil. Trans. Roy. Soc., Lond. **244**, 87 [1951] und Acta Met. **3**, 487 [1955].

wäre es daher wünschenswert, die genannten Kenngrößen für möglichst viele Materialien zu kennen.

Es existieren nun zwar prinzipiell experimentelle Methoden, die genügend Informationen über den Dipolcharakter z. B. einer Sorte von Fremdatomen in einem sonst reinen Kristall zu geben vermögen, doch sind kaum bisher Rechnungen gemacht worden, mit Hilfe derer man aus den betreffenden Meßdaten auch wirklich den Kräftedipol ausrechnen kann. Eine der wenigen Rechnungen ist diejenige von ESHELBY³³, welche jedoch zunächst auf den Sonderfall beschränkt ist, daß die Gitterfehler (einer Sorte) als Dilatationszentren $-P_{ii}$ wirken, und daß solche Zentren statistisch im ganzen Kristall verteilt sind. Man kann dann die den Fehlstellen zuzuschreibende röntgenographisch meßbare Änderung der Gitterkonstanten auf der Grundlage von Gl. (17) berechnen. Weitere Methoden – zumindest für spezielle Fälle – lassen sich auf Grund der Wechselwirkung der Gitterfehler mit von außen her angelegten oder von anderen Fehlern herrührenden elastischen Feldern angeben. Die für diese Fälle geltenden Formeln wollen wir in der nächsten Ziffer ableiten.

Zum Schluß dieser Ziffer bemerken wir noch kurz, daß es für makroskopische Betrachtungen oft vorteilhaft ist, auch Einzwängungen, die aus vielen Atomen bestehen, als Dipol, Quadrupol usw. zu kennzeichnen. Die Einzwängung beschreibt man mikroskopisch durch den Verschiebungssprung $\mathfrak{b}(\mathbf{r})$ und $n_j \mathfrak{b}_j$ ist die zugehörige Dichte der Verschiebungsdipole der Grenzfläche. Der makroskopisch singuläre Verschiebungsdipol folgt hieraus sofort zu $\oint n_j \mathfrak{b}_j d\mathbf{f}$. Im allgemeinen kann man hier für den Einschuß definierte elastische Konstanten angeben, so daß sich der dem Verschiebungsdipol zugeordnete Kräftedipol durch Lösung eines elastischen Randwertproblems bestimmen läßt (Ziff. 4). Man kann dann auf die meist komplizierten elektronentheoretischen Rechnungen verzichten.

4. Die Wirkung elastischer Felder auf punktförmige Gitterfehlstellen

Wir berechnen zunächst die Kraft, die von einem elastischen Feld auf eine infinitesimale Versetzungsschleife mit dem BURGERS-Vektor $\mathfrak{b} \equiv (\mathfrak{b}_j)$ ausgeübt wird, indem wir die PEACH-KOEHLERSche Formel³⁴

für die Kraft auf ein Linienelement $d\mathbf{l}$ einer Versetzungslinie

$$d\mathfrak{R} = d\mathbf{l} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathfrak{b} \equiv (\epsilon_{ijk} d\mathbf{l}_i \mathfrak{b}_l \sigma_{jl}) \quad (19)$$

anwenden. In dieser Formel ist $\boldsymbol{\sigma}$ die durch Aufschneiden am Orte des Versetzungselements zu messende Spannung, die insbesondere beim Vorhandensein von Grenzflächen die Rückwirkung des Elements auf sich selbst enthalten muß (man vgl. ESHELBY³² unter dem Stichwort „Bildkraft“). Man erhält so mit Hilfe des STOKESSchen Satzes die Kraft

$$\mathfrak{R}_k = \oint d\mathfrak{R}_k = \oint \epsilon_{ijk} d\mathbf{l}_i \mathfrak{b}_l \sigma_{jl} = \int \int \epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} n_m \mathfrak{b}_l \nabla_n \sigma_{jl} d\mathbf{f} \quad (20)$$

und mit der bekannten Zerlegungsformel

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

$$\mathfrak{R}_k = \int \int n_j \mathfrak{b}_l \nabla_k \sigma_{jl} d\mathbf{f} - \int \int n_k \mathfrak{b}_l \nabla_j \sigma_{jl} d\mathbf{f}. \quad (21)$$

Der Einfachheit halber setzen wir

$$(\nabla_j \sigma_{jl}) \equiv \text{Div } \boldsymbol{\sigma} = 0,$$

schließen also den relativ wenig wichtigen Fall von äußeren Volumenkräften am Ort der Versetzungsschleife aus.

Zur Integration der Gl. (21) benützen wir die TAYLOR-Entwicklung um den Mittelpunkt $\mathbf{r} = 0$ der Schleife

$$\sigma_{jl} = \sigma_{jl} \Big|_0 + \nabla_m \sigma_{jl} \Big|_0 x_m + \frac{1}{2!} \nabla_m \nabla_n \sigma_{jl} \Big|_0 \cdot x_m x_n + \dots \quad (22)$$

und ziehen die konstanten Teile dieser Summe vor das Integral. Es bleibt dann

$$\mathfrak{R}_k = \nabla_m \sigma_{jl} \Big|_0 \int \int n_j \mathfrak{b}_l \nabla_k x_m d\mathbf{f} + \frac{1}{2!} \nabla_m \nabla_n \sigma_{jl} \Big|_0 \cdot \int \int n_j \mathfrak{b}_l \nabla_k x_m x_n d\mathbf{f} + \dots \quad (23)$$

und mit $\nabla_k x_m = \delta_{km}$

$$\mathfrak{R}_k = \nabla_k \sigma_{jl} \Big|_0 \int \int n_j \mathfrak{b}_l d\mathbf{f} + \nabla_k \nabla_m \sigma_{jl} \Big|_0 \cdot \int \int x_m n_j \mathfrak{b}_l d\mathbf{f} + \dots \quad (24)$$

Führen wir nun den oben besprochenen Grenzübergang $f \rightarrow 0$ durch, so wird das erste Integral mit

³³ J. D. ESHELBY, J. Appl. Phys. **25**, 255 [1954].

³⁴ M. PEACH u. J. S. KOEHLER, Phys. Rev. **80**, 436 [1950]. Diese Formel gilt auch für asymmetrische Spannungen, vgl. Anm.²⁴.

unserem Verschiebungsdipol Q_{jl} identisch, das zweite nennen wir Verschiebungsquadrupol Q_{mjl} usw. Der Index 0 ist nunmehr überflüssig, und es bleibt als Gesamtkraft auf unsere Versetzungsschleife:

$$\mathfrak{R} = \text{grad}(\sigma_{jl} Q_{jl} + \nabla_m \sigma_{mjl} Q_{mjl} + \dots) \quad (25)$$

Falls nun einerseits das Spannungsfeld σ sich im Bereich der Versetzungsschleife nur wenig ändert, andererseits die Schleife von der Kreisform nicht allzusehr abweicht, so daß die höheren Pole klein bleiben, kann man deren Beitrag zur Gesamtkraft vernachlässigen und erhält als Kraft auf eine punktförmige Gitterfehlstelle die Dipolkraft

$$\mathfrak{R} = \text{grad}(\sigma_{jl} Q_{jl}). \quad (26)$$

Differenziert wird σ_{jl} .

Gl. (26) gilt im Falle des symmetrischen Verschiebungsdipols nur bei Homogenität der elastischen Konstanten auch am Orte der Einzwängung, da andernfalls die PEACH-KOEHLER-Formel offenbar nicht in der beschriebenen Weise angewendet werden darf. (Bei antisymmetrischen Spannungen sind die elastischen Konstanten indessen gleichgültig, Ziff. 1.) Bei hinreichender elastischer Homogenität erhält man aus Gl. (26) mit Hilfe von Gl. (18) für den symmetrischen Dipol

$$\mathfrak{R} = -\text{grad}(\varepsilon_{ij}^s P_{ij}^s). \quad (27)$$

Im Gegensatz zu Gl. (26) gilt diese Gleichung trotz Ungültigkeit von Gl. (18) auch noch bei inhomogener Einzwängung. Denn die Arbeit, welche die die Verformung ϵ^s hervorrufenden äußeren Kräfte bei einer virtuellen Verschiebung der Einzwängung leisten, wird durch die gleichzeitig eintretende Änderung der Verschiebung (17) bestimmt. (Man vgl. auch ESHELBY³², erste Arbeit.) Demnach ist die Kenntnis des eine Gitterfehlstelle kennzeichnenden Kräftedipols wichtiger als diejenige des Verschiebungsdipols.

Aus Gl. (27) entnimmt man, daß der Ausdruck

$$U = \varepsilon_{ij}^s P_{ij}^s \quad (28)$$

die Energie des Kräftedipols im Deformationsfeld ϵ^s darstellt. U ist gleich der Arbeit, die man aufwenden muß, um den Kräftedipol von einer undeformierten Stelle (reversibel) an eine Stelle mit den Deformationen ε_{ij}^s zu bringen. Durch eine genau gleichlaufende Rechnung²⁴ erhält man, wenn man

die Reihenentwicklung (22) nach dem 1. Glied abbricht, das auf einen Verschiebungsdipol wirkende Drehmoment zu

$$\mathfrak{D}_k = \oint (\mathbf{r} \times d\mathfrak{R})_k = -\varepsilon_{ijk} \sigma_{il} Q_{jl} \quad (29)$$

und im Fall des symmetrischen Dipols (zunächst) bei elastischer Homogenität

$$\mathfrak{D}_k = \varepsilon_{ijk} c_{ilmn} s_{jlpq} \varepsilon_{mn}^s P_{pq}^s \quad (30)$$

mit $(s_{ijkl}) = (c_{ijkl})^{-1}$. Die an Gl. (26) und (27) anschließenden Bemerkungen gelten sinngemäß auch hier.

Gl. (26) bzw. (27) regelt u. a. die Kraftwirkungen zwischen punktförmigen Gitterfehlstellen, ferner zusammen mit Gl. (19) die Kraftwirkungen zwischen punktförmigen Gitterfehlern und Versetzungen. Diese Wirkungen bestimmen weitgehend das mechanische Verhalten unserer Werkstoffe, es sei dieserhalb auf die unter² zitierten Arbeiten verwiesen. Dies mag genügen, um die Bedeutung der Gl. (26) und (27) zu unterstreichen.

Für die Anwendung von Gl. (30) nennen wir als Beispiel das Drehmoment auf den Verschiebungsdipol, welcher ein Kohlenstoffatom auf einem Zwischengitterplatz im Eisengitter beschreibt (Abb. 5 a). Bei einer Dehnung des Kristalls in x -Richtung wird dies Kohlenstoffatom gern auf einen Platz wie in Abb. 5 b überspringen (SNOEK-Effekt³⁵). Man kann dann sagen, der Dipol wurde um 90° gedreht. Da man den SNOEK-Effekt experimentell gut erfassen kann, ist hier eine Möglichkeit zur Bestimmung von P gegeben^{35a}.

Wir wollen zum Schluß dieser Ziffer noch ein paar Worte über die elastische Polarisierbarkeit der punktförmigen Gitterfehler sagen. Sie tritt immer dann auf, wenn Einzwängung (I) und ursprüngliche Materie (II) sich elastisch unterscheiden. Wir wollen hier nur den Fall behandeln, daß man den Bereichen I und II zuverlässig bestimmte elastische Konstante zuordnen kann. In diesem Fall läßt sich die Polarisierbarkeit rein elastizitätstheoretisch berechnen. Andernfalls benötigt man zu ihrer Berechnung wieder die Elektronentheorie. Mit unserer Einschränkung erfassen wir noch die Gitterlücke, der man nach SEEGER und BROSS³⁶ in kubisch flächenzentrierten Kristallen die Elastizitätsmoduln ≈ 0 zuschreiben hat, ferner Paare und größere Ansamm-

³⁵ D. L. SNOEK, Physica **8**, 711 [1941].

^{35a} Vgl. auch A. W. COCHARDT, G. SCHOECK u. H. WIEDERSICH, Acta Met. **3**, 533 [1955].

³⁶ A. SEEGER u. H. BROSS, Z. Phys. **145**, 161 [1956].

lungen von Gitterlücken. Wie weit man bei Fremd-
atomen für den Bereich I definierte elastische Kon-
stanten angeben kann, ist nicht leicht zu sagen; am
ehesten scheint dies bei den als Dilatationszentren
wirkenden Atomen zu gehen, bei denen nur der
Kompressionsmodul des Einschlusses benötigt wird.
Im Falle von Zwischengitteratomen kann man ohne
elektronentheoretische Rechnungen bestenfalls grobe
Schätzungen geben. Diese Schwierigkeiten entfallen
bei Einschlüssen, die aus vielen Atomen bestehen,
wie sie z. B. bei Phasenumwandlungen, Keimbildun-
gen, Ausscheidungen usw. im festen Körper auf-
treten.

Wir definieren die elastische Polarisierbarkeit
 $\mathbf{R} \equiv (R_{ijkl})$ sinngemäß durch die Gleichung³⁷

$$P_{ij}^{\text{ind}} = R_{ijkl} \epsilon_{kl}^{\text{S}}, \quad (31)$$

wo \mathbf{P}^{ind} der induzierte Krätedipol und ϵ^{S} das De-
formationsfeld wie oben ist. Wenn uns induzierte
Quadrupole und höhere Pole nicht interessieren,
genügt es wie im analogen elektrischen Fall, ein kon-
stantes Deformationsfeld ϵ^{S} zu betrachten, wodurch
das prinzipiell zu lösende Randwertproblem stark
vereinfacht wird.

Wir untersuchen zunächst den Fall, daß der Ein-
schluß I bei spannungsfreiem Zustand von II eben-
falls spannungsfrei ist. Wir denken der Einfachheit
halber das Medium II unendlich ausgedehnt und die
(bei Abwesenheit der Inhomogenität I) konstante
Deformation $\epsilon^{\text{S}} = \text{Def } \hat{s}^{\text{II}}$ durch im Unendlichen an-
greifende Kräfte hervorgerufen. Das Verschiebungs-
feld in II hat dann die Form

$$\hat{s}_i^{\text{II}} = \hat{s}_i^{\text{II}} + P_{jk}^{\text{ind}} \nabla_j S_{ki} + P_{jkl}^{\text{ind}} \nabla_j \nabla_k S_{li} + \dots, \quad (32)$$

wo P_{jk}^{ind} , P_{jkl}^{ind} usw. die induzierten Kräfte-Dipole,
-Quadrupole usw. darstellen. Das zu lösende Rand-
wertproblem lautet: Gesucht das Verschiebungsfeld
 \hat{s}^{I} in I (als Lösung der elastischen Differentialglei-
chungen) und \hat{s}^{II} in II (in der Form (32)), welche
die Randbedingungen

$$\hat{s}_i^{\text{I}} - \hat{s}_i^{\text{II}} = 0, \quad n_i \sigma_{ij}|_{\text{I}} - n_i \sigma_{ij}|_{\text{II}} = 0 \quad (33)$$

erfüllen. Bei Vernachlässigung der höheren Pole in
(32) kann man P_{ij} nur noch näherungsweise be-
stimmen, da die Entwicklung (32) nicht nach ortho-
gonalen Funktionen geht.

Bei der analogen elektrischen Aufgabe ergibt sich
bekanntlich für ein Ellipsoid I bei elektrischer Iso-
tropie ein konstantes Feld in I. Dasselbe gilt im
elastischen Fall wenigstens für die Kugel. (Hier ist
das Deformationsfeld in I konstant, vgl. ESHELBY³²,
zweite Arbeit.)

Ist der inhomogene Einschluß bereits ohne An-
legen des Feldes ϵ^{S} eingezwängt, so hat man zusätz-
lich noch das eben formulierte Randwertproblem
mit den folgenden Anforderungen zu lösen: Auf
der rechten Seite der ersten Gl. (33) steht statt 0
nun $-\hat{s}$ [vgl. Gl. (12)], und \hat{s}^{II} , d. h. ϵ^{S} wird Null
gesetzt. Den so ermittelten Dipol \mathbf{P}^{S} hat man zusam-
men mit \mathbf{P}^{ind} in Gl. (27) einzusetzen, um die Kraft
auf den Einschluß zu bekommen.

5. Anwendungen^{37a}

Wir wollen zunächst durch qualitative Über-
legungen zeigen, daß bei makroskopisch hinreichend
inhomogener plastischer Verformung und bei nicht
zu hohen Temperaturen in einem Kristall auch
makroskopische Eigenspannungen auftreten müssen.
Bei genügend tiefen Temperaturen ist die Zahl der
Gleitsysteme bekanntlich sehr beschränkt, und das
Klettern der Versetzungen sowie die Diffusion von
Gitterlücken oder Atomen fällt praktisch ganz weg.
Zum Beispiel gibt es im hexagonalen Kristall nur
eine Schar von Gleitebenen, die in dem Kristallstab
der Abb. 6 a unter 45° zur Stabachse liegen möge.

Wenn wir diesen Stab nun auf Biegung beanspru-
chen, herrscht bekanntlich kurz vor Eintreten des
plastischen Fließens eine linear über den Quer-

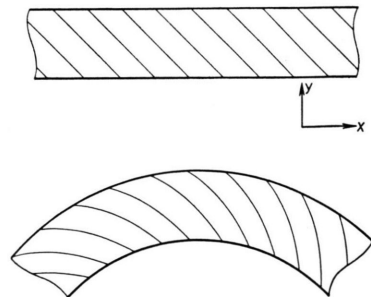


Abb. 6. a) Hexagonaler Kristallstab. Die Spuren seiner Gleit-
ebenen in der Papierebene sind mitgezeichnet.

b) Krümmung der Gleitebenen nach Versetzungswanderung
infolge Biegung.

³⁷ Wir beschränken uns auf den Fall symmetrischer Dipole,
wobei wir den Index S bei \mathbf{P}^{ind} der Einfachheit halber
weglassen.

^{37a} Wegen weiterer Anwendungen vgl. auch A. SEEGER, Col-
loquium on Deformation and Flow of Solids, Madrid 1955.
Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer 1956.

schnitt veränderliche einachsige Zug- bzw. Druckspannung. Die nur in der Gleitebene mögliche (konservative) Erzeugung der zum Gleiten notwendigen Versetzungslinien wird bei Verstärkung der Biegemomente zuerst an der Ober- und Unterseite des Stabes beginnen und dann ins Innere vordringen. Nehmen wir etwas vereinfachend an, daß nur reine Stufenversetzungen, die senkrecht zur Papierebene verlaufen (deren BURGERS-Vektor also in Richtung der Winkelhalbierenden der x - und y -Achse zeigt), gebildet werden.

Die Versetzungen eines Vorzeichens werden nun oberhalb der neutralen Faser schräg nach links oben, diejenigen mit dem anderen Vorzeichen schräg nach rechts unten wandern. Diese sich gegenläufig bewegendes Versetzungen werden sich großenteils (makroskopisch) annihilieren. Indessen können sich die nach links oben wandernden Versetzungen nur mit von links oben kommenden Versetzungen annihilieren. Diese werden aber weiter außen erzeugt und sind deshalb zahlreicher, so daß nicht jede von ihnen eine von rechts unten kommende Versetzung zur Annihilation trifft. Demnach müssen, wenn letztere alle makroskopisch annihiliert sind, oberhalb der neutralen Faser noch Versetzungen mit dem Vorzeichen des von links oben nach rechts unten gewanderten Typs übrig bleiben, die makroskopisch durch eine Dichte α zu beschreiben sind. Man macht sich in gleicher Weise klar, daß am Ende der Verformung auch unterhalb der neutralen Faser Versetzungen des gleichen Vorzeichens übrig bleiben müssen.

Beim Nachlassen der äußeren Biegemomente findet nun kein wesentliches Zurückgleiten der gewanderten Versetzungen statt. Man wird daher erwarten, daß nach dem Verschwinden der äußeren (verformenden) Spannungen immer noch makroskopische Spannungen gemessen werden, die nun den Versetzungen α zuzuschreiben sind. Damit solche Spannungen auftreten, ist nach Ziff. 1 nur nötig, daß der symmetrische Inkompabilitätstensor

$$\eta^S = \text{Sym}(\alpha \times \nabla) \quad \text{oder} \quad \eta_{il}^S = \text{Sym}(\epsilon_{jkl} \nabla_k \alpha_j)$$

nicht verschwindet. In unserem Fall sind nur die Komponenten α_{zx} und α_{zy} von Null verschieden (und zwar gleich groß). Nehmen wir noch an, daß α_{zx} und α_{zy} nur von y abhängen, was sicher mit guter Näherung erfüllt ist, so bleibt schließlich

$$\eta_{zz}^S = \frac{\partial}{\partial y} \alpha_{zx}$$

übrig. Das heißt, wenn nur α über die y -Richtung nicht konstant ist, erhält man makroskopisch meßbare Eigenspannungen. Insbesondere müssen diese schon vorhanden sein, wenn nur ein Teil des Stabes plastisch verformt ist; in diesem Fall ist α im Innern des Stabes Null.

Gleichzeitig mit den Eigenspannungen treten makroskopische Krümmungen der Netzebenen auf. Erwärmt man nun den Stab, so erhalten die Versetzungen plötzlich mehr Bewegungsfreiheit und es können sich die schon makroskopisch annihilierten Versetzungen auch weitgehend mikroskopisch annihilieren. Die überschüssigen Versetzungen eines Vorzeichens können sich ebenfalls energetisch günstiger anordnen, ein Vorgang, welcher als Polygonisation bekannt ist. Hierbei bleiben die makroskopischen Netzebenenkrümmungen großenteils erhalten (Abb. 6b), die mikroskopischen (welche elastische Verbiegungen darstellen) verschwinden weitgehend. Die makroskopischen Netzebenenkrümmungen werden von den betreffenden Versetzungen (makroskopisch) spannungsfrei aufrechterhalten, das zu diesen Versetzungen gehörige η^S ist Null (vgl. Ziff. 1).

In manchen Fällen ist es denkbar, daß durch solche Erholungsvorgänge die Eigenspannungen weitgehend abgebaut sind, so daß nur noch hie und da z. B. komprimierte Gebiete bestehen, die gegen ihre Umgebung durch eine flächenhafte Versetzungsanordnung β nach Gl. (12) abgegrenzt sind, wo β senkrecht zur Fläche steht. Für eine kugelförmige Einzwängung vom Radius r_0 ergibt sich nach Gl. (12) β leicht proportional zu $1/r_0$. Ordnet man andererseits eine feste Zahl von Versetzungen längs einer kugelförmigen Fläche vom Radius r an, so ist die Versetzungsdichte natürlich proportional $1/r^2$ und der zugehörige Verschiebungssprung variiert wie $1/r$. Nun ist die in dem Einschluß gespeicherte elastische Energie gleich $K \Delta V^2/V$, wenn K der Kompressionsmodul und V bzw. ΔV das Volumen bzw. dessen Änderung darstellen. Diese Energie ist demnach proportional $r |\dot{\beta}|^2$. Läßt man also die Versetzungsschar radial nach außen wandern (klettern), so nimmt zwar das komprimierte Gebiet zu, seine Energie aber ab wie $1/r$. Letzteres gilt auch für das Gebiet außerhalb der Kugel, für das die gleiche Energieformel mit einem abgeänderten Modul K' gilt³⁸. Es wirkt demnach eine radial nach außen gerichtete Kraft auf die Versetzungen, der

³⁸ E. KRÖNER, Acta Met. 2, 302 [1954].

diese bei weiterer Temperaturerhöhung schließlich nachgeben werden.

In Wirklichkeit ist alles wohl etwas komplizierter, denn Versetzungsanordnungen der eben beschriebenen Art werden selten auftreten, da die wirklichen Versetzungen in Kristallen nur ganz bestimmte, diskrete BURGERS-Vektoren haben können. Diese Schwierigkeit wird jedoch weitgehend behoben, wenn man annimmt, daß zugleich die Struktur des komprimierten Gebietes stark gegen diejenige der Umgebung verdreht ist, so daß noch zusätzlich eine Korngrenze vorhanden ist. Es liegt dann nahe, den eben beschriebenen Vorgang mit der Rekristallisation in Verbindung zu bringen³⁹.

Zum Schluß wollen wir uns noch kurz mit denjenigen Eigenspannungen beschäftigen, die bei Phasenumwandlungen, Ausscheidungen usw. in Kristallen auftreten. Diese Vorgänge laufen ab, wenn sich dabei die freie Energie des Systems erniedrigen kann. Außer der Entropie sind hierbei vor allem die chemische Energie und die Energie der Spannungsfelder maßgebend. Während die chemischen Kräfte in Metallen sehr kurzreichend sind, können die inneren Spannungsfelder sehr weitreichend und entsprechend ihre Energie sehr groß sein. Indessen ist auch hier die Möglichkeit gegeben, die weitreichenden Anteile der Spannungsfelder (meist schon im Zustande ihres Entstehens) weitgehend abzubauen. Jeder solche Vorgang ist letzten Endes nichts anderes als eine in bestimmter Weise ablaufende „innere“ plastische und elastische Verformung, welche zugleich eine Eigenspannungserzeugung darstellt. Betrachten wir z. B. eine neu gebildete, mehr Raum beanspruchende kreiszylinderförmige Phase I innerhalb einer Matrix II. I möge etwa schwach tetragonal, II kubisch sein, und die Gitterkonstanten seien nur wenig verschieden. Dann ist es denkbar, daß keine Netzebene von I an der Grenzfläche aufhört, sondern alle nach II hinein weiter verlaufen. Es ist anschaulich klar, daß man in diesem Fall bei zunehmender Größe von I außerordentlich starke Eigenspannungen bekommen kann. Als Maß der Einzwängung kann man etwa wieder den Verschiebungssprung \bar{b} nehmen. Gl. (12) gibt dann die zugehörige Versetzungsdichte β in der Grenzfläche.

Man beachte, daß sich diese Versetzungen von denen der oben behandelten eingezwängten Kugel wesentlich unterscheiden. Im letzteren Fall hörten ja Netzebenen an der Grenzfläche auf und die Versetzungen bildeten die Randlinien der aufgehenden Netzebenen. Der Betrag ihres BURGERS-Vektors mußte demnach gleich einem Netzebenenabstand sein. Wir nennen solch eine Versetzung auch „BURGERS-Versetzung“.

Im vorliegenden Falle dagegen hören keine Netzebenen auf, sondern sie werden an der Phasengrenze nur gewissermaßen dünner. Entsprechend wird der Betrag des BURGERS-Vektors der einzelnen Versetzungen gleich der Differenz der Netzebenenabstände in I und II. Ist z. B. in I nur die Gitterkonstante in Richtung der tetragonalen Achse (d^I) von der Gitterkonstanten (d^{II}) in II verschieden, so erhält man als Versetzungsanordnung in der Phasengrenze lauter dicht liegende ringförmige parallele Versetzungen. Die elastische Energie dieser Anordnung läßt sich relativ gut rechnen, wenn man die vom Verf. mit Hilfe des Tensors der Spannungsfunktionen aufgestellten Formeln für die „Gegen- und Selbstinduktivität“ von Versetzungslinien benützt⁴⁰.

Bei bemerkenswertem Unterschied der Gitterkonstanten in I und II kann man sich nicht vorstellen, daß die Phase I in dieser Weise stark anwachsen kann, da dann die elastische Energie viel zu groß wird. Es wäre jedoch denkbar, daß sich ab und zu spontan eine BURGERS-Versetzung bildet, d. h. es findet plötzlich eine Umordnung der Atome in der Phasengrenze statt, so daß ab und zu eine Netzebene von II an der Grenzfläche aufhört. Man sieht leicht, daß auf diese Weise die makroskopischen Spannungsfelder auch bei ausgedehnter Phase I praktisch vollkommen annihiliert werden können. Dazu ist nur nötig, daß die (makroskopische) Dichte der neugebildeten BURGERS-Versetzungen ($|\bar{b}| = d^{II}$) gleich $-\beta$ wird. Das heißt, der Abstand dieser Versetzungen muß gleich $d^{II}/(d^I - d^{II})$ sein. Mikroskopisch bleiben natürlich weiterhin Eigenspannungen übrig, welche einen wesentlichen Teil der Energie der Phasengrenze liefern^{40a}.

Man kann sich auf diese Weise leicht klarmachen, daß ein Einschuß in Form eines langen Zylinders

³⁹ Die letzten beiden Absätze verdanke ich einem Hinweis von Herrn Prof. U. DEHLINGER. Man vgl. hierzu und zu dem folgenden U. DEHLINGER, in Handbuch der Physik VII/2, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, im Druck.

⁴⁰ E. KRÖNER, Z. Phys. **141**, 386 [1955] und Z. angew. Phys. **7**, 249 [1955], Anhang.

^{40a} In analoger Weise läßt sich fast mühelos die Verteilung α^B von BURGERS-Versetzungen angeben, die z. B. das Spannungsfeld einer eingepprägten magnetostriktiven Deformation ϵ^P kompensiert. Es ist $\alpha^B = -\alpha = -\text{Rot } \epsilon^P$. Dies als einziges Beispiel für den Nutzen der Versetzungsauffassung bei Magnetostriktion. Für Temperaturspannungen gilt dasselbe.

(Nadel) u. U. weniger elastische Energie verbraucht, als wenn sich das in ihm enthaltene Material in Form vieler Jünger Schichten ansammeln würde. Das heißt praktisch, daß der Satz von NABARRO⁴¹, wonach vom elastischen Standpunkt aus bei völliger Kohärenz der Netzebenen in der Grenzfläche Ausscheidungen, Keimbildungen usw. in festen Körpern Scheibenform haben sollten, bei großen Ausscheidungen usw. nicht mehr zuständig ist. Energieberechnungen von FRANZ und KRÖNER⁴² am Beispiel der GUINIER-PRESTON-Zonen in Al – Cu-Legierungen

haben dies bestätigt und geben ein Beispiel für den Nutzen der Versetzungsauffassung auch im Falle der Eigenspannungen bei Ausscheidungen, Keimbildungen usw. in festen Körpern. Es ist kaum nötig, zu sagen, daß sich ähnliche Betrachtungen bei beliebiger Form der Phase I anstellen lassen.

Den Herren Prof. Dr. U. DEHLINGER und Doz. Dr. A. SEEGER danke ich herzlich für die Anregung zur Beschäftigung mit diesem interessanten Gebiet, für zahlreiche fruchtbare Diskussionen und aufbauende Kritik. Herrn Prof. E. FUES gilt mein Dank für kritische Durchsicht des Manuskripts. Ziffer 2 ist das Ergebnis längerer Zusammenarbeit des Verfassers mit Herrn Dipl.-Phys. G. RIEDER. Auch der Deutschen Forschungsgemeinschaft sei für ihre Unterstützung gedankt.

⁴¹ F. R. N. NABARRO, Proc. Roy. Soc. Lond. A **175**, 519 [1940].

⁴² H. FRANZ u. E. KRÖNER, Z. Metallkde. **46**, 639 [1955].

Theorie der Kristallplastizität*

IV. Verfestigung und Gleitmechanismus dichtest gepackter Metalle und Legierungen

Von ALFRED SEEGER

Aus dem Max-Planck-Institut für Metallforschung, Stuttgart, und dem Institut für theoretische und angewandte Physik der Technischen Hochschule Stuttgart

(Z. Naturforschg. **11 a**, 985–998 [1956]; eingegangen am 18. August 1956)

Nach einer allgemeinen Erörterung des systematischen Aufbaus der Theorie der Kristallverfestigung werden die für das plastische Verhalten der hexagonalen Metalle Zink, Cadmium und Magnesium charakteristischen Prozesse besprochen. Es wird gezeigt, daß bei diesen Metallen in der Umgebung der Raumtemperatur „dynamische Erholung“ stattfindet, deren Grundprozeß mit demjenigen der „statischen Erholung“ übereinstimmt und wohl das zuerst von MORR betrachtete Klettern von Versetzungen ist. Die entsprechenden Verhältnisse bei kubisch-flächenzentrierten Metallen werden an anderer Stelle** ausführlich behandelt. In der vorliegenden Arbeit werden in Anlehnung an die reinen Metalle die homogenen kubisch-flächenzentrierten Legierungen besprochen. Die Unterdrückung der Gleitbandbildung bei manchen Legierungen sowie die latente Verfestigung und das „Überschießen“ von Metallen und Legierungen werden im einzelnen diskutiert.

1. Einleitung und allgemeiner Überblick

Folgender systematischer Aufbau bietet sich für eine deduktive Theorie der plastischen Verformung von Kristallen in natürlicher Weise an:

a) Theorie der Grundstruktur des unverformten Kristalls, d. h. Ableitung der Zahl und der Anordnung der Versetzungen aus den Vorgängen beim Kristallwachstum;

b) Berechnung der Fließspannung bei gegebener Versetzungsanordnung.

c) Ermittlung der Veränderungen, welche die Versetzungsanordnung infolge der Abgleitung a des Kristalls erleidet.

Wendet man b) auf einen *vorverformten* Kristall mit bekannter Versetzungsanordnung an, so erhält man die Fließspannung τ des betreffenden Kristalls, während sich bei der Anwendung auf die *Grundstruktur* die kritische Schubspannung τ_0 (= Fließspannung des unverformten Kristalls) ergibt. Um daraus die Fließspannung als Funktion der Abgleitung, also die sog. Verfestigungskurve $\tau = \tau(a)$, zu erhalten, muß man das Problem c) lösen und somit berechnen können, wie sich die Versetzungsanordnung mit der Abgleitung ändert. Dabei würde im Prinzip zunächst eine Kenntnis der infinitesimalen Änderung, also des Verfestigungsanstiegs (auch Verfestigungskoeffizient genannt) $\vartheta = d\tau/da$ genügen, da man ja dar-

* Frühere Arbeiten dieser Serie: A. SEEGER, Z. Naturforschg. **9 a**, 758, 856, 870 [1954] (im folgenden als I, II bzw. III zitiert). Die Veröffentlichung der vorliegenden Arbeit wurde infolge anderweitiger Inanspruchnahme des Autors verzögert; ihre Grundgedanken wurden auf der 3. Dis-

kussionstagung über Metallplastizität, Stuttgart 1954, und auf der Hauptversammlung der Deutschen Gesellschaft für Metallkunde, Klagenfurt 1955, vorgetragen.

** A. SEEGER, J. DIEHL, S. MADER u. H. REBSTOCK, Phil. Mag., im Druck.